2.2 Inverse d'une matrice

Inverse dans $\mathbb{R}$: $7x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{7} = 30 \cdot \frac{1}{7}$

On multiplie par l'inverse de 7, à savoir $\frac{1}{7}$

L'inverse de x est noté x^{-1} et est défini par

$$(*) \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1 \quad \text{ou} \quad x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$$

⚠ Dans $\mathbb{R}$, x^{-1} existe si et seulement si $x \neq 0$.

Pour les matrices: $A\vec{x} = \vec{b} \rightsquigarrow \vec{x} = \frac{\vec{b}}{A}$???

On doit pouvoir trouver A^{-1} t.q.

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n$$

Ceci n'existe pas si A n'est pas carrée !

$A_{m \times n}$

$A_{m \times n} A^{-1} = I_{n \times n}$

$A^{-1} A_{m \times n} = I_{n \times n}$

Exemple:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

⚠ a priori si $AB = I_n$, on n'a pas forcément $BA = I_n$!?!

Définition 28 (inverse).
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Alors A est dite *inversible* s'il existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Remarque
Si A est inversible, alors la matrice B telle que $AB = BA = I_n$ est unique. En effet, Supposons qu'on ait C avec $AC = CA = I_n$

Alors $B = BI_n = B(AC) \underset{\uparrow \text{asso.}}{=} (BA)C = I_nC = C$

Si A est inversible, sa matrice *inverse* est notée A^{-1}. Si A n'est pas inversible, elle est dite *singulière*.

Exemples

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - c = 1 \\ a + c = 0 \\ 2b - d = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 1 \leftarrow \\ b + d = 0 \\ a + c = 0 \leftarrow \\ b + d = 1 \end{cases}$

A^{-1} n'existe pas !

Formule pour une matrice 2×2

Théorème 17. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$*. Alors, si* $ad - bc \neq 0$*, la matrice* A *est inversible et on a*

$$A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{= \text{dét}(A)}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

voir chap. 3

Exemples

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \text{dét}(A) = 5 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 \neq 0$

Donc A^{-1} existe et $A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \text{dét}(A) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow$ A est singulière

Preuve (th. 17)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -bc+ad \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (ad-bc)$$

$$= \text{dét}(A) \cdot I_2$$

Application aux systèmes d'équations linéaires

Théorème 18. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Si A est inversible, alors pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution $\vec{s}$, donnée par $\vec{s} = A^{-1}\vec{b}$.*

$\underbrace{A^{-1}A}_{I_n}\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Soit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. La solution de $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est donnée par

$\vec{s} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Pour $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, on trouvera $\vec{s} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -2 \\ -31 \end{pmatrix}$

Remarque

Il n'est pas nécessaire que A soit inversible pour que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admette une solution.

- Si A est inversible, alors la solution existe et est unique pour tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

- Si A n'est pas inversible, alors le système peut être consistant ou inconsistant en fonction de $\vec{b}$.

Théorème 19. *Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ des matrices inversibles. Alors*

1. *A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.* ⚠ à l'ordre !
3. *A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Preuve

1. par unicité de l'inverse ! $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$
$\Rightarrow$ l'inverse de A^{-1} c'est A !

2. $AB \cdot (B^{-1}A^{-1}) \overset{?}{=} I_n$

$AB \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (BB^{-1}) \cdot A^{-1} = A I_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \ldots$

3. exercice !

Matrices élémentaires

But

Exprimer les opérations élémentaires sous forme matricielle et les utiliser pour trouver un algorithme permettant de calculer l'inverse d'une matrice.

Définition 29 (élémentaire)**.**
Une matrice $E \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est dite *élémentaire* si elle s'obtient par une seule opération élémentaire sur les lignes de $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations de type I

Pour $1 \leq i \neq j \leq n$, on note E_{ij} la matrice élémentaire obtenue en échangeant les lignes i et j de I_n.

E_{ij} = I_n dans laquelle on a échangé les lignes i et j

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérations de type II

Pour $1 \leq i \leq n$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on note $E_i(\alpha)$ la matrice élémentaire obtenue à partir de I_n en multipliant la i^e ligne par α.

$L_i \longleftrightarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$

$$E_2(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérations de type III

Pour $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $E_{ij}(\alpha)$ la matrice élémentaire obtenue à partir de I_n en ajoutant la $\cancel{i}\,j^e$ ligne multipliée par α à la $\cancel{j^e}\ i^e$ ligne.

$L_i \longleftrightarrow L_i + \alpha L_j$

$$E_{12}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on ajoute -3 fois la 2^e ligne

Remarque :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ n'est pas une matrice élémentaire !

Exemple :

$$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11}-3a_{21} & a_{12}-3a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

On a ainsi associé une matrice élémentaire à chaque opération élémentaire et on s'aperçoit que les opérations élémentaires effectuées sur une matrice A peuvent s'exprimer par le produit de A avec les matrices élémentaires correspondantes.

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$

$L_2 \Leftrightarrow L_3$

E_{23} $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ a_{31} & \cdots \\ a_{21} & \cdots \end{pmatrix}$

Remarque : En multipliant A à gauche par une matrice élémentaire, on effectue l'opération élémentaire correspondante sur les lignes de A.

Théorème 20. *Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Si E est une matrice élémentaire obtenue de I_m avec une seule opération élémentaire, alors EA est une matrice de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de A avec la même opération élémentaire.*

Remarque La multiplication par une matrice élémentaire à droite correspond à une op. él. sur les colonnes.

Rappel : On ne travaille qu'avec des op. él. sur les lignes pour échelonner les matrices.

Théorème 21. *Les matrices élémentaires sont inversibles.*

En effet, les opérations élémentaires sont réversibles.

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$L_2 \leftrightarrow L_2 - 3L_1$ $\quad$ $L_2 \leftrightarrow -\frac{1}{8} L_2$ $\quad$ $L_1 \leftrightarrow L_1 - 2L_2$

$E_{21}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $E_2(-\frac{1}{8}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/8 \end{pmatrix}$ $\quad$ $E_{12}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On obtient la forme ER de A en effectuant le produit

$$E_{12}(-2)\, E_2(-\tfrac{1}{8})\, E_{21}(-3) A = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = I_2$$

Exercice: Trouver l'inverse des matrices él. suivantes:

$E_{13} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$E_1(4) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$E_{23}(-\frac{1}{2}) \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$

Algorithme pour trouver A^{-1}

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible d'inverse A^{-1}. Alors on a $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Affirmation : La forme échelonnée réduite de A est I_n.

Preuve: Posons $A^{-1} = (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$ où $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$ est la i^e colonne de A^{-1}.

et $I_n = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$ $\quad \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^e$ ligne

$$AA^{-1} = A(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) = (A\vec{x}_1 \dots A\vec{x}_n)$$ par déf. du produit matriciel

$\Rightarrow$ chercher A^{-1} revient à résoudre

$$(A\vec{x}_1 \dots A\vec{x}_n) = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$$

$$A\vec{x}_i = \vec{e}_i \qquad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

Comme A est inversible, $A\vec{x}_i = \vec{e}_i$ a une unique solution, donc A a n pivots. Par conséquent

$A \sim \dots \sim I_n$ et I_n est bien la forme ER (unique !) de A.

Conséquence :
En utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan pour résoudre $A\vec{x_i} = \vec{e_i}$, on obtient

$$(A \mid \vec{e_i}) \sim \dots \sim (I_n \mid \underbrace{\vec{x_i}}_{\text{sol. unique}})$$

On écrira

$$(A \mid \vec{e_1} \dots \vec{e_n}) = (A \mid I_n) \sim \dots \sim (I_n \mid \underbrace{\vec{x_1} \dots \vec{x_n}}_{= A^{-1}})$$

Remarque : Si on n'obtient pas I_n, la matrice A est singulière.

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{matrice él. } E_{21}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{matrice él. } E_{32}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{I_3} \quad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

En utilisant les matrices él.,

$$E_{32}(-1)\, E_{21}(-1)\, I_3 = A^{-1}$$

$$E_{32}(-1)\, E_{21}(-1)\, A = I_3$$

Théorème 22. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors A est inversible si et seulement si on peut passer de A à I_n moyennant l'algorithme de Gauss-Jordan.*

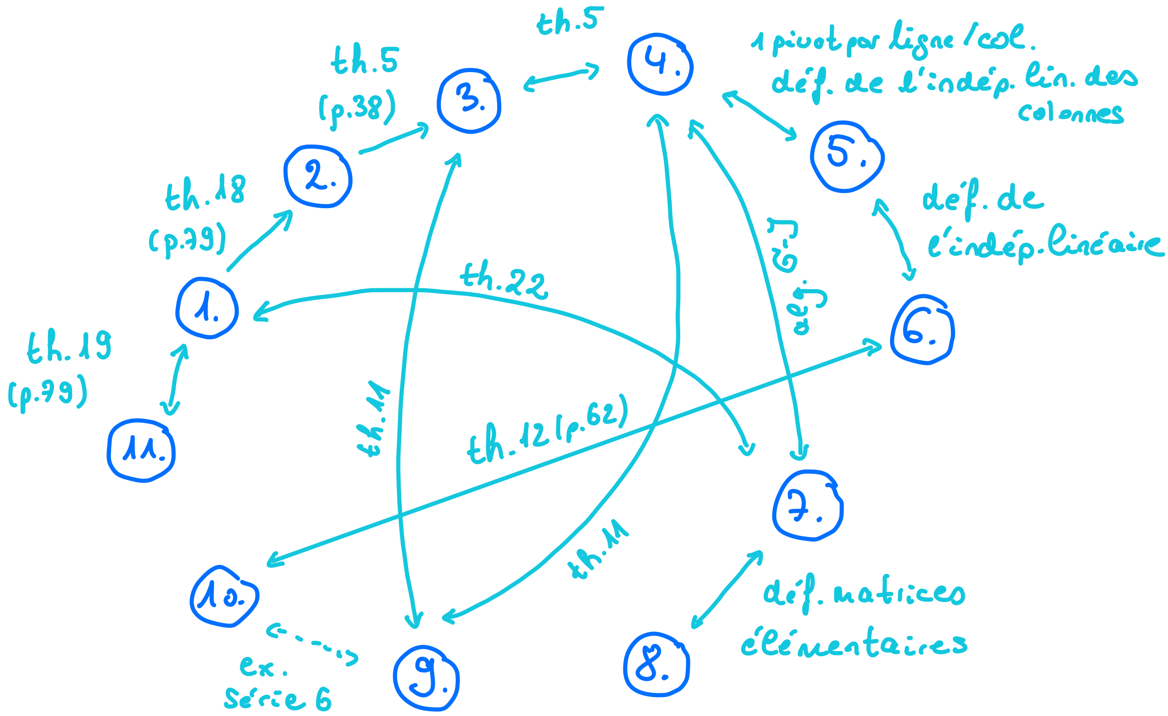
Dans ce cas, toute suite d'opérations élémentaires transformant A en I_n transformera I_n en A^{-1}.

On peut résumer les résultats obtenus jusqu'à présent dans le théorème suivant : à connaître

Théorème 23. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La matrice A est inversible*
2. *Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution donnée par $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$*
3. *Les colonnes de la matrice A engendrent $\mathbb{R}^n$*
4. *La matrice A possède un pivot par ligne* /colonne
5. *Les colonnes de A sont linéairement indépendantes*
6. *L'équation homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale*
7. *On peut passer de A à I_n avec l'algorithme de réduction*
8. *La matrice A est un produit de matrices élémentaires*
9. *L'application linéaire $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associée à A est surjective*
10. *L'application linéaire $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associée à A est injective*
11. *La matrice A^T est inversible*

Remarques


th.5
th.5
(p.38)
th.18
(p.79)
th.19
(p.79)
th.22
th.11
th.12 (p.62)
th.11
1 pivot par ligne/col.
déf. de l'indép. lin. des colonnes
déf. de l'indép. linéaire
déf. G-J
déf. matrices élémentaires
ex. série 6
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.